Chapitre 3– Exercice 10

Aspect thermodynamique du paramagnétisme

1. D'après la distribution de Boltzmann, on a, en introduisant $\beta = 1/(k_B T)$:

$$N_1 = Z^{-1}\exp(-\beta\mathcal{E}_{p,+}) = Z^{-1}\exp(\beta\mu B) \quad \text{et} \quad N_2 = Z^{-1}\exp(-\beta\mathcal{E}_{p,-}) = Z^{-1}\exp(-\beta\mu B)$$

La condition de normalisation permet de calculer la constante Z :

$$N = N_1 + N_2 = Z^{-1}\left[\exp(\beta\mu B) + \exp(-\beta\mu B)\right] \quad \text{d'où} \quad Z^{-1} = \frac{N}{2\cosh(\beta\mu B)}$$

Par conséquent :

$$N_1 = \frac{N}{2\cosh(\beta\mu B)}\exp(\beta\mu B) \quad \text{et} \quad N_2 = \frac{N}{2\cosh(\beta\mu B)}\exp(-\beta\mu B)$$

2. Projetons sur $\mathbf{e}_z$:

$$M = \frac{1}{V}(N_1\mu - N_2\mu) = \frac{N\mu}{V}\,\frac{\exp(\beta\mu B) - \exp(-\beta\mu B)}{2\cosh(\beta\mu B)} = \frac{N\mu}{V}\tanh(\beta\mu B)$$

3. Si $X \gg 1$, $\tanh X \approx 1$: $M(X)$ admet pour asymptote : $M(X) = N\mu/V$.

Si $X \approx 0$, $\tanh X \approx X$: la courbe admet pour tangente à l'origine : $M(X) = N\mu X/V$. Le point d'intersection S de cette droite avec l'asymptote a pour abscisse $X(S)$ telle que (Fig. **??**) :

$$\frac{N\mu}{V}X(S) = \frac{N\mu}{V} \quad \text{d'où} \quad X(S) = 1$$

4. Pour $X \gg X(S)$, M tend vers $N\mu/V$: tous les moments magnétiques sont orientés parallèlement à $\mathbf{B}$ avec le même sens. La différence d'énergie entre les deux niveaux est grande devant $k_B T$, énergie caractéristique de l'agitation thermique, de telle sorte que pratiquement seul le niveau le plus bas est peuplé.

Pour $X \ll X_S$ soit $\mu B \ll k_B T$: $M \approx (N\mu/V) \times (\beta\mu B) \approx 0$. Dans ce cas, la différence d'énergie entre les deux niveaux est faible comparée à $k_B T$: l'agitation thermique fait facilement passer un moment magnétique d'un état à l'autre. Il y a autant de moments magnétiques sur les deux niveaux et donc compensation.