Chapitre 7– Exercice 4

Variation de l'entropie d'une mole de diazote

1. L'entropie S étant une fonction d'état, sa variation ΔS, entre l'état initial et l'état final, est indépendante de l'évolution suivie. On effectue donc le calcul de ΔS en utilisant un chemin réversible quelconque entre les états extrêmes :

$$\Delta S = nC_{vm} \ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right) + nR\ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right)$$

Notons qu'on aurait pu aussi travailler avec les variables T et p et obtenir la relation :

$$\Delta S = nC_{pm} \ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right) + nR\ln\left(\frac{p_f}{p_i}\right)$$

2. En différentiant l'expression $TV^{\gamma-1} = \text{Cte}$, on obtient :

$$T(\gamma-1)V^{\gamma-2}\,\mathrm{d}V + V^{\gamma-1}\,\mathrm{d}T = 0 \quad \text{soit} \quad (\gamma-1)\,T\,\frac{\mathrm{d}V}{V} + \mathrm{d}T = 0$$

On en déduit :

$$\mathrm{d}S = -nC_{v,m}(\gamma-1)\frac{\mathrm{d}V}{V} + nR\frac{\mathrm{d}V}{V} \quad \text{soit} \quad \mathrm{d}S = 0 \quad \text{puisque} \quad C_{v,m} = \frac{R}{\gamma-1}$$

Quant à la chaleur reçue, on l'obtient à l'aide du bilan énergétique de la transformation :

$$\mathrm{d}U = nC_{vm}\,\mathrm{d}T = \delta Q - p\,\mathrm{d}V \quad \text{d'où} \quad \delta Q = -nC_{vm}(\gamma-1)T\,\frac{\mathrm{d}V}{V} + p\,\mathrm{d}V$$

soit :

$$\delta Q = -nC_{vm}(\gamma-1)\frac{p\,\mathrm{d}V}{R} + p\,\mathrm{d}V = 0$$

Ainsi, un gaz parfait, qui suit la loi $TV^{\gamma-1} = \text{Cte}$, évolue de façon isentropique ($\mathrm{d}S = 0$) et adiabatique ($\delta Q = 0$). Vérifions que la transformation subie par le gaz est réversible :

$$\mathrm{d}S = \delta S^r + \delta S^c = \delta S^c = 0$$

3. De l'expression $TV^{\gamma-1} = \text{Cte}$, il est facile de déduire, à l'aide de l'équation d'état des gaz parfaits, la relation $T^\gamma/p^{\gamma-1} = \text{Cte}$. On en déduit :

$$T_f = T_i\left(\frac{p_f}{p_i}\right)^{1-1/\gamma}$$

Pour un tel gaz diatomique parfait : $C_{vm} = 5R/2$, $C_{pm} = 7R/2$, d'où : $\gamma = C_{pm}/C_{vm} = 1,4$. On a donc : $T_f = 273 \times 10^{2/7} = 527,1$ K. L'évolution étant adiabatique et réversible, on a : $Q = 0$ et $\Delta S = 0$. Quant à la variation d'énergie interne, elle vaut :

$$\Delta U = nC_{vm}\Delta T = 5,28\ \text{kJ} \quad \text{d'où} \quad W = \Delta U = 5,28\ \text{kJ}$$