Chapitre 11– Exercice 5

Conduction thermique dans une boule avec source radioactive

1. Compte tenu de la symétrie sphérique, effectuons, en régime stationnaire, le bilan énergétique dans l'espace compris entre deux sphères infiniment voisines, de rayons r et $r + \mathrm{d}\,r$. Il vient, en rappelant la loi de Fourier $\mathbf{J}_u = -\lambda \mathrm{d}\,T/\,\mathrm{d}\,r\mathbf{e}_r$:

$$0 = 4\pi r^2 J_u(r) - 4\pi(r+\mathrm{d}\,r)^2 J_u(r+\mathrm{d}\,r) + \sigma_u 4\pi r^2\,\mathrm{d}\,r \quad \text{soit} \quad 0 = \lambda 4\pi r^2 J_u(r)\left(\frac{\mathrm{d}\,T}{\mathrm{d}\,r}\right)_r - \lambda 4\pi(r+\mathrm{d}\,r)^2\left(\frac{\mathrm{d}\,T}{\mathrm{d}\,r}\right)_{r+\mathrm{d}\,r} + \sigma_u 4\pi r^2\,\mathrm{d}\,r$$

en explicitant. On obtient, en simplifiant :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}\,T}{\mathrm{d}\,r}\right) = -\frac{\sigma_u}{\lambda}r^2$$

ce qui donne, en intégrant :

$$\left(r^2\frac{\mathrm{d}\,T}{\mathrm{d}\,r}\right) = -\frac{\sigma_u}{3\lambda}r^3 + A \quad \text{soit} \quad \frac{\mathrm{d}\,T}{\mathrm{d}\,r} = -\frac{\sigma_u}{3\lambda}r + \frac{A}{r^2}$$

A étant une constante. Comme le gradient de température a une valeur finie au centre de la boule ($r = 0$), la constante A doit être nulle. Si l'on intègre une seconde fois, on obtient l'expression générale de la température en un point de l'intérieur de la boule :

$$T(r) = -\frac{\sigma_u}{6\lambda}r^2 + B$$

B étant une autre constante d'intégration que l'on détermine à l'aide de la température en surface :

$$T_0 = T(R) = -\frac{\sigma_u}{6\lambda}R^2 + B \quad \text{d'où} \quad T(r) = -\frac{\sigma_u}{6\lambda}(r^2 - R^2) + T_0$$

2. Au centre, $T(0) = T_0 + \Delta T$ avec $\Delta T = 150\ \mathrm{K}$. Par conséquent :

$$T(0) = T_0 + \Delta T = \frac{\sigma_u}{6\lambda}R^2 + T_0 \quad \text{d'où} \quad \sigma_u = \frac{6\lambda\Delta T}{R^2} = 5,4\ \mathrm{MW}\cdot\mathrm{m}^{-3}$$