Chapitre 13– Exercice 4

Détente d'un gaz dans une tuyère convergente

1. Le bilan énergétique relatif à un système ouvert s'écrit :

$$\mathrm{d}(\mathcal{E}_k^M + \mathcal{E}_{p,ex} + U) = \delta W_u + \delta Q + [\delta m(e_k^M + e_{p,ex} + h)]_s^e \quad \text{soit} \quad [\delta m(e_k^M + e_{p,ex} + h)]_s^e = 0$$

puisque le régime est stationnaire, la paroi rigide et adiabatique. Il en résulte :

$$\frac{w_e^2}{2} + h_e = \frac{w_s^2}{2} + h_s$$

2. Comme l'air est supposé parfait :

$$h_s - h_e = \frac{C_p}{M}(T_s - T_e) = \frac{\gamma r}{\gamma - 1} T_e \left(\frac{T_s}{T_e} - 1\right) \quad \text{puisque} \quad C_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} \quad \text{et} \quad r = \frac{R}{M}$$

Exprimons T_s/T_e en fonction de x. L'évolution étant isentropique, il vient :

$$s_s - s_e = c_p \ln\left(\frac{T_s}{T_e}\right) - r\ln\left(\frac{p_s}{p_e}\right) = 0 \quad \text{d'où} \quad \frac{\gamma}{\gamma-1}\ln\left(\frac{T_s}{T_e}\right) - \ln x = 0 \quad \text{et} \quad \frac{T_s}{T_e} = x^{1-1/\gamma}$$

Finalement :

$$h_s - h_e = \frac{\gamma r}{\gamma - 1} T_e (x^{1-1/\gamma} - 1) \quad \text{et} \quad w_s \approx [2(h_e - h_s)]^{1/2} = \left(\frac{2\gamma r}{\gamma - 1}\right)^{1/2} (1 - x^{1-1/\gamma})^{1/2}$$

3. a) La quantité $\rho w \Sigma$ est le débit-masse $q_m = \delta m/\mathrm{d}t$.
b) On sait que :

$$pV = nRT = \frac{m}{M}RT = mrT \quad \text{d'où} \quad p = \rho r T \quad \text{et} \quad \rho_s = \frac{p_s}{rT_s}$$

Or, la détente étant isentropique, on a :

$$T_s = T_e\, x^{1-1/\gamma} \quad \text{d'où} \quad \rho_s = \frac{x p_e}{rT_e\, x^{1-1/\gamma}} = \frac{p_e}{rT_e}\, x^{1/\gamma}$$

c) Le débit-masse q_m s'écrit :

$$q_m = \rho_s w_s \Sigma_s = \frac{p_e}{rT_e}\, x^{1/\gamma}\, \Sigma_s \left(\frac{2\gamma r}{\gamma - 1} T_e\right)^{1/2} \left(1 - x^{1-\frac{1}{\gamma}}\right)^{1/2} = A\Sigma_s f(x)$$

avec :

$$A = \frac{p_e}{T_e^{1/2}} \left[\frac{2\gamma}{r(\gamma-1)}\right]^{1/2} \quad \text{et} \quad f(x) = x^{1/\gamma}\left(1 - x^{1-1/\gamma}\right)^{1/2}$$

d) On obtient la valeur maximale de q_m en dérivant $f^2(x) = x^{2/\gamma}(1 - x^{1-1/\gamma})$:

$$\frac{\mathrm{d}f^2}{\mathrm{d}x} = \left[\frac{2}{\gamma}\, x^{2/\gamma - 1}(1 - x^{1-1/\gamma}) - \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) x^{1/\gamma}\right] = 0$$

d'où :

$$x^{1/\gamma - 1} = \frac{\gamma + 1}{2} \quad \text{et} \quad x_c = \left(\frac{2}{\gamma + 1}\right)^{\gamma/(\gamma - 1)} = 0,528$$